МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов**

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

*Учебное пособие для студентов факультета ВМиК МГУ*

**Москва 2007**

УДК 517.977.5 ББК 22.161.8

K??Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова

Рецензенты: акад. *Коровин С.К.* проф. *Никольский М.С.*

**Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.**

K?? **Оптимальное управление. Линейная теория и приложе- ния**: Учебное пособие для студентов факультета ВМиК МГУ. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ло- моносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.), 2007. – 270 с.

ISBN 5-89407-288-3

Данное учебное пособие разработано в поддержку курса “Оп- тимальное управление”, читаемого на факультете ВМиК для студентов 3-5 курсов. Приводятся подробные пояснения и ре- комендации.

270 стр., рис.: 101, библиогр.: 32 наим.

УДК 517.977.5 ББК 22.161.8

**ISBN 5-89407-288-3** c*©* Факультет вычислительной математики

и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007 c*©* Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., 2007

**1 Введение**

**1.1 Постановка математических задач оптимального**

**управления**

**1.1.1 Управляемый объект и его динамика**

Мы постоянно встречаемся с управляемыми объектами, к числу которых относится, например, автомобиль, корабль, летательный ап- парат, робот, технологический процесс на производстве и т.п. У всех этих объектов есть органы управления (“рули”), изменением положе- ния которых можно влиять на движение объекта. Возникает вопрос о том, как управлять объектом наилучшим образом (оптимально), как применять для этих целей математические методы.

Применение математических методов для исследования физиче- ских, технических, технологических и т.д. процессов становится воз- можным после того, как построена математическая модель изучаемо- го процесса. Математические модели реальных физических процессов могут описываться

*•* обыкновенными дифференциальными уравнениями,

*•* разностными уравнениями,

*•* дифференциальными уравнениями в частных производных,

*•* интегральными уравнениями,

*•* смешанным образом, например, обыкновенными дифференци- альными уравнениями и уравнениями в частных производных,

*•* и т.д.

Математическое моделирование реальных процессов является от- ветственным этапом исследования.

Мы будем рассматривать математические модели, описываемые си- стемами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такими моде- лями описывается достаточно широкий круг процессов, например, ме- ханическое движение летательных аппаратов и других технических объектов.

Предположим, что рассматриваемый объект в каждый момент вре- мени *t* полностью описывается конечным набором чисел

*x*1(*t*)*,...,xn*(*t*)*,*

3

которые называются *фазовыми координатами* объекта. Из этих чи- сел образуем вектор

*x* =

⎛⎜⎝*x*...1*xn*⎞⎟⎠*, x ∈ En,*

размерности *n*, который будем называть *вектором фазовых коорди- нат* объекта. Пусть закон изменения фазовых координат во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

̇*xi* = *fi*(*t, x*1*,...,xn*;*u*)*, i* = 1*,...,n,*

где *t* – время, ̇*xi* = функции своих аргументов. *dxi*

*dt* – производная по времени *t*, *fi* – известные Основой для составления таких систем дифференциальных уравнений служат законы конкретных областей знания (например, физические законы). Эту систему дифференциаль- ных уравнений удобно записывать в векторной форме

̇*x* = *f*(*t, x, u*)*.* (1)

Итак, динамика управляемого объекта описывается векторным диф- ференциальным уравнением (1), в правую часть которого входит па- раметр *u*, называемый *управлением*. Поучительно сравнить уравне- ние (1) с уравнением

̇*x* = *f*(*t, x*)*,* (2)

которое является предметом исследования теории обыкновенных диф- ференциальных уравнений; правая часть уравнения (2) не содержит аргумента *u*.

Ответим сейчас на вопрос о том, как пользоваться дифференци- альным уравнением (1) для выделения и исследования конкретного движения управляемого объекта. Уравнение (1) описывает не конкрет- ное движение управляемого объекта, а его технические возможности. Для описания конкретного движения управляемого объекта следует

*•* выбрать управление *u* = *u*(*t*) как некоторую функцию времени *t*;

*•* задать начальное условие

*x*(*t*0) = *x*0; (3)

4

*•* решить задачу Коши

̇*x* = *f*(*t, x, u*(*t*)) *≡ F*(*t, x*)*, x*(*t*0) = *x*0*.* (4)

Решение *x*(*t*) задачи Коши (4), зависящее от управления *u*(*t*) и от начального условия *x*0, описывает конкретное движение управляемого объекта.

**1.1.2 Класс допустимых управлений**

Управление *u* = *u*(*t*) характеризует положение “рулей” управляе- мого объекта. Пусть *u* = (*u*1*,...,ur*) – *r*-мерный вектор.

Если *u*1 – угол, равный отклонению руля от некоторого направле- ния, то типично ограничение*u−*1 ⩽ *u*1 ⩽ *u*+1 *,*

где *u−*1 , *u*+1 – заданные числа, причём важно подчеркнуть, что крайние значения *u−*1 , *u*+1 допустимы (неравенства нестрогие).

Если, например, *u*2 – сила тяги, то типично ограничение

0 ⩽ *u*2 ⩽ *u*+2 *,*

где *u*+2 – максимально возможная сила тяги, причём и здесь крайние значения 0, *u*+2 также допустимы.

Обобщая эту ситуацию, будем считать, что вектор управления в каждый момент времени *t* удовлетворяет условию

*u ∈ U,*

где *U* – некоторое замкнутое ограниченное множество в *r*-мерном пространстве *Er*. Множество *U* называется *областью управления*.

Опишем теперь *класс допустимых управлений* У: класс У состоит из вектор-функций *u*(*t*), значения которых удовлетворяют условию

*u*(*t*) *∈ U ∀t*;

в описание класса допустимых управлений входит также структурное ограничение на управление *u*(*t*), т.е. указание характера зависимо- сти допустимых управлений *u*(*t*) от времени *t*. Например, допустимые управления *u*(*t*) могут быть

5

*•* кусочно-непрерывными функциями времени *t*,

*•* кусочно-постоянными функциями времени *t*,

*•* измеримыми функциями времени *t*,

*•* гладкими функциями времени *t*.

Таким образом, можно кратко записать определение класса У до- пустимых управлений следующим образом:

У =

⎧⎪⎨⎪⎩*u*(*t*) ∣∣∣∣∣∣∣

1) *u*(*t*) *∈ U ∀t* 2) *u*(*t*) удовлетворяет заданному структурному ог-

раничению на характер зависимости от времени⎫⎪⎬⎪⎭*.*

Выбор структурного ограничения определяется с одной стороны техническими, а с другой стороны математическими соображениями. Для приложений весьма важен класс кусочно-непрерывных управле- ний; для решения вопросов теоретического обоснования привлекается более обширный класс измеримых управлений.

Чтобы подчеркнуть зависимость класса У допустимых управлений от области управления *U*, будем писать У = У*U*.

**Определение 1.1.** Управление *u*(*t*) называется *кусочно-непрерыв- ным* на отрезке [*t*0*,t*1], если функция *u*(*t*) непрерывна на отрезке [*t*0*,t*1] всюду, кроме, быть может, конечного числа точек *τ*1*,...,τN ∈* (*t*0*,t*1), которые являются точками разрыва первого рода (точками разрыва с конечными скачками); кроме того, на концах отрезка [*t*0*,t*1] выполняются равенства

*u*(*t*0 +0) = *u*(*t*0)*, u*(*t*1 *−* 0) = *u*(*t*1)*.*

**Определение 1.2.** Управление *u*(*t*) будем называть *гладким* на отрезке [*t*0*,t*1], если функция *u*(*t*) определена и непрерывна на этом отрезке вместе с первой производной ̇*u*(*t*).

**1.1.3 Множества начальных и конечных состояний управляемо-**

**го объекта**

Мы уже говорили (раздел 1.1.1) о том, что для выделения кон- кретного движения управляемого объекта нужно выбрать управление *u* = *u*(*t*) и задать начальное условие *x*(*t*0) = *x*0, а затем решить за- дачу Коши (4). Начальный момент времени *t*0 считается заданным,

6

управление *u*(*t*) выбирается из класса допустимых управлений, опи- санного в разделе 1.1.2; вектор *x*0 (начальное состояние управляемого объекта) может быть однозначно заданным или принадлежать неко- торому множеству *M*0, лежащему в фазовом пространстве *En*. Таким образом, должно быть выполнено условие

*x*(*t*0) *∈ M*0*,* (5)

в котором множество *M*0 называется *множеством начальных состо- яний* управляемого объекта. Это множество может состоять из одной точки *x*0, но может быть и более обширным (содержать более одной точки).

Предположим, что целью управления движением рассматриваемо- го объекта является перевод объекта из начального состояния (5) в конечное состояние

*x*(*t*1) *∈ M*1*,* (6) где *M*1 – некоторое множество, лежащее в фазовом пространстве *En*. Множество *M*1 называется *множеством конечных состояний* объ- екта. Момент времени *t*1 (конечный момент процесса управления, *t*1 *> t*0) может быть заранее заданным или же определяться в процес- се решения задачи (это должно быть чётко оговорено в постановке задачи). Итак, мы хотим перевести объект из множества *M*0 во мно- жество *M*1 (см. рисунок 1.1).

*x*2

*x*(*t*0)

0 *x*1

*x*(*t*)

*M*0 *M*1

Рисунок 1.1

Например, в задаче о переводе спутника с одной орбиты на другую множества *M*0 и *M*1 состоят более, чем из одной точки.

7

*x*(*t*1)

Типична ситуация, когда перевод объекта из *M*0 в *M*1 может быть выполнен неединственным способом, при помощи различных допусти- мых управлений. В этом случае появляется возможность для оптими- зации управляемого процесса, т.е. можно решать задачу о переводе объекта из *M*0 в *M*1 “наилучшим способом” Обсудим сейчас вопрос о том, какой смысл следует приписать последнему выражению.

**1.1.4 Критерий качества управления**

Рассмотрим пару

(*x*(*t*)*,u*(*t*))*, t*0 ⩽ *t* ⩽ *t*1*,* (7)

где *u*(*t*) – допустимое управление, *x*(*t*) – отвечающая этому управле- нию траектория с начальным условием *x*(*t*0) = *x*0 *∈ M*0, т.е. *x*(*t*) – решение задачи Коши (4), причём выполняется условие *x*(*t*1) *∈ M*1.

Рассмотрим также функционал

*J* =

1∫*tt*0

*f* 0(*t, x*(*t*)*,u*(*t*))*dt,* (8)

*f* 0(*t, x*(*t*)*,u*(*t*))*dt,* (8)

где *f* 0(*t, x, u*) – известная функция своих аргументов. Таким обра- зом, каждой паре (7) ставится в соответствие число *J*, определяемое по формуле (8). Функционал (8) называется *критерием качества управления*. Он может иметь физический смысл (в зависимости от функции *f* 0):

а) расхода топлива,

б) энергетических затрат,

в) финансовых затрат или прибыли,

г) времени перехода из *M*0 в *M*1,

д) и т.д.

Конкретный выбор функционала *J* в приложениях производится ин- женером, исходя из требований, предъявляемых к рассматриваемому управляемому процессу. В случае *f* 0 = 1 получаем

*J* = *t*1 *− t*0 (9)

8

(функционал имеет физический смысл времени перехода объекта из *M*0 в *M*1).

Нашей целью является минимизация функционала (8), характери- зующего качество процесса управления.

Мы описали выше основные элементы1, типичные для математи- ческой задачи оптимального управления, и переходим сейчас к её постановке.

**1.1.5 Постановка задачи оптимального управления**

**Требуется**: перевести объект из множества начальных состояний *M*0, см. (5), на множество конечных состояний *M*1, см. (6), за счёт выбора допустимого управления *u* = *u*(*t*) из класса допустимых управ- лений У, так, чтобы функционал *J*, см. (8), принимал минимальное значение, или в компактной форме

*J → u*(*·*)*∈*Уmin *.*

Управление *u*(*t*), решающее поставленную задачу, называется *оп- тимальным управлением* (в смысле функционала *J*). Траектория *x*(*t*), отвечающая оптимальному управлению *u*(*t*), называется *оптималь- ной траекторией*. В случае (9) задача оптимального управления на- зывается *задачей быстродействия*.

Таким образом, постановка задачи оптимального управления в краткой форме имеет следующий вид:

⎧⎪⎪⎪⎪⎪⎨⎪⎪⎪⎪⎪⎩

̇*x*(*t*) = *f*(*t, x, u*)*, u*(*t*) *∈* У*, x*(*t*0) *∈ M*0*, x*(*t*1) *∈ M*1*, J → u*(*·*)*∈*Уmin *.*

(10)

(10)

Задача (10) требует задания следующего набора исходных данных:

*{f*0*,f*;У = У*U*;*M*0*,M*1*,t*0*}.* (11)

Напомним ещё раз, что момент времени *t*1 окончания процесса управ- ления

1В постановку задачи оптимального управления могут вводиться дополнительные ограничения.

9

а) может быть заранее заданным (и в этом случае число *t*1 следует

отнести к набору элементов (11))

б) может быть незаданным (так обстоит дело, например, в задаче быстродействия, где *t*1 заранее неизвестен), и в этом случае на- хождение *t*1 следует отнести к задаче нахождения оптимального управления *u*(*t*), *t*0 ⩽ *t* ⩽ *t*1.

Заметим, что задача максимизации *I →* max *u*(*·*)*∈*У может быть сведена к задаче минимизации функционала *J* = *−I*.

**1.1.6 Основные математические вопросы теории оптимального**

**управления**

Перечислим основные вопросы теории оптимального управления.

1. Управляемость (возможность перевода объекта из *M*0 в *M* при помощи некоторого допустимого управления; без управляемости решения задачи (10) не существует). Исследование управляемо- сти не связано с критерием качест

2. Существование оптимального управления (пусть объект облада- ет свойством управляемости; существует ли оптимальное управ- ление в выбранном классе допустимых управлений У

3. Необходимые условия оптимальности (теоремы о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понт- рягина [1]). Роль необходимых условий невозможно переоце- нить; необходимые условия позволяют, вообще говоря, выде- лить отдельные траектории, которые могут быть оптимальными, отбраковать заведомо неоптимальные решения. Роль необходи- мых условий оптимальности можно сравнить с ролью условия *f* (*x*)=0 в задаче на минимум функции *f*(*x*) и с ролью уравне- ний Эйлера-Лагранжа в классическом вариационном исчислении

4. Достаточные условия оптимальности.

5. Единственность оптимального управления.

6. Численные методы построения оптимальных решений.

В настоящем курсе излагается линейная теория быстродействия.

10

**1.1.7 Линейная задача быстродействия**

Линейная задача быстродействия является частным случаем зада- чи оптимального управления (10) при условии (9) и в предположении линейности функции *f*:

̇*x* = *Ax* + *u,* (12) *x*(*t*0) *∈ M*0*, x*(*t*1) *∈ M*1*,* (13) *J* = *t*1 *− t*0 *→ u*(*·*)*∈*Уmin *U .* (14)

Здесь *x* =

⎛⎜⎝*x*...1*xn*⎞⎟⎠ – вектор фазовых координат; *x ∈ En*, *A* = (*aij*) – матрица системы (считаем её независящей от време- ни *t*),*u* =

⎛⎜⎝*u*...1*un*⎞⎟⎠ – вектор управления; *u ∈ En*. Класс допустимых управлений

У = У*U* =

{*u*(*t*)∣∣∣∣∣1) принимает значения из компакта *U* 2) задан характер зависимости *u* от *t*

}*.*

Компакт *U* называется *областью управления*. *M*0 – множество начальных состояний объекта, *M*1 – множество конечных состояний объекта, *J* = *t*1*−t*0 – критерий качества управления (время перехода из *M*0 в *M*1).

Линейная задача быстродействия (12)-(14) задаётся набором ис- ходных данных

*{A, M*0*,M*1*,*У = У*U,t*0*}* (15) и состоит в нахождении допустимого управления *u* = *u*(*t*), перево- дящего объект из *M*0 в *M*1 по траекториям уравнения (12) за ми- нимальное время. Управление *u*(*t*), решающее эту задачу, называется *оптимальным по быстродействию*, а соответствующая этому управ- лению траектория *x*(*t*) называется *оптимальной по быстродействию траекторией*.

11

Решить задачу быстродействия (12)-(14) означает, что нужно по набору исходных данных (15) найти оптимальную пару (*x*(*t*)*,u*(*t*)), *t*0 ⩽ *t* ⩽ *t*1.

Векторное дифференциальное уравнение (12) равносильно системе

̇*xi* =

∑*nj*=1

*aij xj* + *ui, i* = 1*,...,n.*

*aij xj* + *ui, i* = 1*,...,n.*

**1.1.8 Два простейших примера**

**Пример 1.1.** Управляемое движение материальной точки по прямой под действием ограниченной внешней силы (*задача о тележке*).

Рассмотрим материальную точку массы *m*, которая движется по прямой (ось *y*) (см. рисунок 1.2), без трения под действием ограни- ченной внешней силы, направленной вдоль оси *y*.

0

*m*

*f*(*t*)  ̄*y*

Рисунок 1.2

Геометрическое положение материальной точки описывается коор- динатой *y* = *y*(*t*). На основании второго закона Ньютона запишем дифференциальное уравнение движения точки

*m* ̈*y* = *f*(*t*)*,*

т.е.

̈*y* = *v*(*t*)*,* (16)

где вия *v*(*t*) *y*(0) = = *a f*(*t*)*m* (начальное – управление. Считаем заданными начальные усло- положение точки), ̇*y*(0) = *b* (начальная ско- рость точки). Дальнейшее движение точки зависит от выбора управ- ления *v*(*t*), которое при *m* = 1 совпадает с *f*(*t*). Пусть управление *v*(*t*) подчинено ограничению

*|v*(*t*)*|* ⩽ 1*.*

Рассмотрим задачу о переводе точки из начального положения *a* при начальной скорости *b* в положение *y* = 0 с нулевой скоростью.

12

Этот перевод осуществляется за счёт выбора управления *v*(*t*). Требу- ется выполнить этот перевод за кратчайшее время.

Полагая *y* = *x*1, ̇*y* = *x*2, *v* = *u*2, перейдём от дифференциального уравнения (16) второго порядка к следующей системе дифференци- альных уравнений { ̇*x*1 = *x*2*,*  ̇*x*2 = *u*2*.* В данном примере размерность фазового пространства равна 2, фа- зовым пространством служит фазовая плоскость *x*1*,x*2. Множество

начальных состояний *M*0 =

{(*ab*)}

состоит из одной точки

(*ab*),

множество конечных состояний *M*1 =

{(00)}

– начало координат,

*x* =

(*x*1*x*2)

– фазовый вектор, *A* =

(0 0 1

0), область управления

*U* =

{*u* =

(*u*1*u*2)∣∣∣∣ *u*1 = 0

} *|u*2*|* ⩽ 1– отрезок. Таким образом, мы получи- ли линейную задачу быстродействия в стандартной форме (12)-(14).

**Пример 1.2.** Управляемое движение математического маятника под действием ограниченной внешней силы.

Рассмотрим движение тяжёлого шарика массы *m* под воздействием упругой силы пружины и внешней силы *f*(*t*) (рисунок 1.3). Задача рассматривается без учёта силы трения.

0 *y m*

Рисунок 1.3

Движение шарика происходит вдоль оси *y*. В состоянии равнове- сия шарик имеет координату *y* = 0. Привлекая физические законы – второй закон Ньютона и закон Гука (упругая сила пропорциональна отклонению от положения равновесия и направлена в сторону положе- ния равновесия) – запишем дифференциальное уравнения движения

*m* ̈*y* = *−ky* + *f*(*t*)*,*

13

где положительный коэффициент *k* характеризует жёсткость пружи- ны. Полагая *ω*2 = *k/m*, *v*(*t*) = *f*(*t*)*/m*, приходим к уравнению

̈*y* + *y* = *v*(*t*) (17)

(здесь мы для упрощения считаем *ω*2 = 1*, |v*(*t*)*|* ⩽ 1). Пусть заданы начальные условия *y*(0) = *a,*  ̇*y*(0) = *b*. Рассмотрим задачу о ско- рейшем успокоении маятника под действием ограниченной внешней силы *v*(*t*).

Полагая *y* = *x*1*,*  ̇*y* = *x*2*, v* = *u*2, от уравнения (17) переходим к системе {  ̇*x*1 = *x*2*,*

̇*x*2 = *−x*1 + *u*2*.*

Как и в предыдущем примере, здесь *n* = 2,

*M*0 =

{(*ab*)}*, M*1 =

{(00)}*,*

*U* =

{*u* =

(*u*1*u*2)∣∣∣∣ *u*1 = 0

*|u*2*|* ⩽ 1}*, x* =

(*x*1*x*2)*,*

но теперь матрица системы имеет вид

*A* =

( 0 *−*1 1

0)*.*

Мы опять пришли к постановке линейной задачи быстродействия в стандартной форме.

Решение этих примеров описывается в разделах 3.13, 3.16.

**1.2 Некоторые сведения из теории обыкновенных**

**дифференциальных уравнений**

При изучении линейной теории оптимального управления важную роль играет формула Коши для решения линейной системы. В 1.2 приводится обоснование формулы Коши для линейных систем с по- стоянными коэффициентами, изучается экспоненциал матрицы, рас- смотрены примеры.

14

**1.2.1 Формула Коши для решения начальной задачи в случае ли- нейной системы обыкновенных дифференциальных урав- нений**

**Скалярный случай** (*n* = 1). Рассмотрим задачу Коши

̇*x* = *ax* + *u*(*t*)*, x*(*t*0) = *x*0*,* (1) где *x* = *x*(*t*) – неизвестная скалярная функция аргумента *t*, *u*(*t*) – известная непрерывная функция, *a* – заданное число, *x*0 – заданное начальное условие, *t* – независимая переменная (время), *t*0 – началь- ный момент времени.

Решение задачи Коши (1) определяется следующей формулой:

*x*(*t*) = *e*(*t−t*0)*a*

⎛⎝*x*0 +

*e*⎞*−*(*s−t*0)*au*(*s*) *ds*⎠ *.* (2)

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Действи- тельно, функция (2) удовлетворяет начальному условию *x*(*t*0) = *x*0 и является решением дифференциального уравнения, так как

̇*x*(*t*) = *ae*(*t−t*0)*a*

∫*tt*0

⎛⎝*x*0 +

*e−*(*s−t*0)*au*(*s*) *ds*⎞⎠ + *e−*(*t−t*0)*a e*(*t−t*0)*au*(*t*) =

= *ax*(*t*) + *u*(*t*)*.*

Формула (2) называется *формулой Коши*. **Замечание 2.1.** Если *u*(*t*) – кусочно-непрерывная функция со скач- ками в точках *τ*1*,...,τs*, то формулой (2) определяется непрерыв- ная кусочно-дифференцируемая функция *x*(*t*), которая удовлетворя- ет дифференциальному уравнению ̇*x*(*t*) = *ax*(*t*) + *u*(*t*) *∀t* = *τ*1*,...,τs*; производная ̇*x*(*t*) в точках *τ*1*,...,τs* имеет конечные скачки (см. ри- сунок 2.1).

**Общий случай** (*n >* 1). Рассмотрим задачу Коши

̇*x* = *Ax* + *u*(*t*)*, x*(*t*0) = *x*0*.* (3)

Здесь

*x* =

∫*tt*0

⎛⎜⎝*x*...1*xn*⎞⎟⎠*, A* =

⎛⎜⎝⎛⎝ *a*11 *... u*1(*t*) ...

⎞⎟⎠*, x*0 = *un*(*t*)⎛*... ...* ⎜⎝*a*1*n*

*...*

*x*01...*x*0*n*⎞⎠*, u*(*t*) =

⎞⎟⎠; *an*1 *... ann*

15

ная векторная функция, *A* – постоянная квадратная матрица, *x*0 – вектор начальных условий. Решение

*x*(*t*) =

⎛⎜⎝*x*1(*t*) ...

*xn*(*t*)⎞⎟⎠

задачи Коши (3) определяется формулой

*x*(*t*) = *e*(*t−t*0)*A*

⎛∫*t*⎞⎝*x*0 +

*e−*(*s−t*0)*A u*(*s*) *ds*⎠*,* (4)

*t*0 или

*x*(*t*) = *e*(*t−t*0)*Ax*0 +

∫*tt*0

*e*(*t−s*)*Au*(*s*) *ds.* (5)

Формулы (4), (5) называются *формулами Коши*. В однородном случае (*u*(*t*) = 0) решение задачи Коши ̇*x* = *Ax*, *x*(*t*0) = *x*0, опреде- ляется формулой

*x*(*t*) = *e*(*t−t*0)*Ax*0*.* (6)

16

В формулах (4)-(6) участвует матричная функция *e*(*t−t*0)*A*, назы- ваемая экспоненциалом матрицы *A*. В разделе 1.2.2 вводится поня- тие *экспоненциала*, изучаются его основные свойства. После этого нетрудно обосновать формулу Коши.

**1.2.2 Экспоненциал постоянной квадратной матрицы. Его ос-**

**новные свойства. Обоснование формулы Коши**

Рассмотрим квадратную матрицу *n*-ого порядка

*D* =

⎛⎝*d...* 11 *... ... d*1*n ... dn*1 *... dnn*⎞⎠

*D* =

((*D*)*ij*)*ni,j*=1*,* (*D*)*ij* = *dij, i, j* = 1*,...,n.*

Напомним известную из математического анализа формулу

*et* =1+ *t*1! + *t*2! 2+ *...* + *tk*! *k*+ *...* =

∑*∞k*=0

*tkk*! *.*

Этот степенной ряд сходится при всех *t*.

Определим теперь экспоненциал *eD* матрицы *D*, положив

*eD* = *E* + 1!1*D* + 2!1*D*2 + *...* + *k*!1*Dk* + *...* =

∑*k*=0 *∞k*!1*Dk.* (7)

Здесь 0! = 1; *D*O = *E* – единичная матрица *n*-го порядка.

Таким образом, экспоненциал определён как сумма матричного ря- да (7), члены которого являются квадратными матрицами порядка *n*. Экспоненциал *eD* – квадратная матрица порядка *n*. Сходимость матричного ряда (7) понимается в смысле поэлементной сходимости, т.е.

(*eD*)*ij* = (*E*)*ij* + 1!1(*D*)*ij* + 2!1(*D*2)*ij* + *...* + *k*!1(*Dk*)*ij* + *....* (8)

В случае *D* = *tA*, где *t* – скалярный множитель (в приложениях *t* – время), *A* – (*n × n*)-матрица, получаем

*etA* = *E* + 1!*tA* + *t*2!2*A*2 + *...* + *tk*!*kAk* + *...* (9)

17

**Теорема 2.1** (*об основных свойствах экспоненциала*).

1) Для любой (*n×n*)-матрицы *D* существует экспоненциал *eD* (схо- дится матричный ряд (7), т.е. сходятся *n*2 числовых рядов (8));

2) если *A, B* – две перестановочные (*AB* = *BA*) (*n × n*)-матрицы,

то

*eA · eB* = *eA*+*B*;

3) матрица *eD* невырождена, причём её обратная матрица опреде-

ляется равенством (*eD*)*−*1 = *e*(*−D*);

4) пусть *D* = *tA*; матричная функция *etA* непрерывно дифференци-

руема, причём *dt detA* = *AetA* = *etAA.*

*2 Доказательство*. 1) Докажем сходимость числовых рядов (8) для любой матрицы *D*. Для этого оценим общий член рядов (8). Пусть

*|*(*D*)*ij|* ⩽ *d, i, j* = 1*,...,n.*

Тогда

∣∣∣(*D*2)*ij*∣∣∣ =

∣∣∣∣∣ ∑*n*(*D*)*iα*(*D*)*αjα*=1∣∣∣∣∣ ⩽ *nd* 2*,* ∣∣∣(*D*3)*ij*∣∣∣ ⩽ *n*2*d* 3*,*

...................................

{} индукция∣∣∣(*Dk*)*ij*∣∣∣ ⩽ *nk−*1*dk,* ...................................

Отсюда получаем оценку общего члена ряда (8):

∣∣∣∣ *k*!1(*Dk*)*ij*∣∣∣∣ ⩽ 1*n*

(*nd*)*k*! *k*

*.* (10)

18

Теорема сравнения для числовых рядов, сходимость ряда

∑*∞k*=1

(*nd*)*k*! *k*

= *end n*

*−* 1

и неравенство (10) позволяют сделать заключение о сходимости всех *n*2 рядов (8), причём эти ряды сходятся абсолютно. Итак, эк- поненциал *eD* определен для любой матрицы *D*.

2) Пусть *AB* = *BA*. Тогда

(*A* + *B*)2 = (*A* + *B*)(*A* + *B*) = *A*2 + *AB* + *BA* + *B*2 = *A*2+2*AB*+*B*2*,* (*A* + *B*)3 = *A*3 + 3*A*2*B* + 3*AB*2 + *B*3*,*

.......................................................................

(*A* + *B*)*m*= *Am* + *mAm−*1*B* + *...* + *mABm−*1 + *Bm* =

=

1*n*

∑*mk*=0

*k*!(*m m*!

*− k*)!*AkBm−k* = *k*+*l*=*m* ∑*k, l*⩾0

*m*! *k*!*l*!*AkBl,* (11)

т.е. для перестановочных матриц *A, B* имеет место формула бинома Ньютона, *k*!(*m m*!

*− k*)! – биномиальные коэффициенты. Привлекая (7), (11), получаем:

*eA · eB* (7)=

( ∑*∞k*=0

*k*!1*Ak*)

*·* ( ∑*∞l*=0

*l*!1*Bl*)

=

∑*∞k*=0

∑*∞l*=0

*m*! *k*!*l*!*AkBl* =

=

⎛⎜⎝ ∑*k*+*l*=*m k, l*⩾0

*m*! *k*!*l*!*AkBl*⎞∑*∞*⎟⎠ = *m*=0

1∑*∞m*! *m*=0

1*m*!(*A* + *B*)*m* (7)= *eA*+*B.*

**Задача 2.1.** Привести примеры матриц *A*, *B*, для которых

*eA · eB* = *eA·B.*

3) Невырожденность экпоненциала и формула для его обращения вытекают из части 2) рассматриваемой теоремы. Действительно, в силу перестановочности матриц *D* и (*−D*) получаем:

*eD · e−D* = *eD−D* = *e*O = *E, eD · e−D* = *E.*

19

4) Докажем, что матричная функция *etA* непрерывно дифферен- цируема по аргументу *t*, т.е. каждый её элемент (*etA*)*ij* – непрерывно дифференцируемая функция аргумента *t*. Так как

(*etA*)*ij* =

∑*∞k*=0

*tk*!*k*(*Ak*)*ij* (12)

– сумма степенного ряда относительно аргумента *t* (радиус сходимо- сти этого ряда равен *∞*), и степенные ряды можно дифференцировать сколько угодно раз, причём при дифференцируемости радиус сходи- мости не изменяется, то функции (12) аналитические. Следовательно, существует производная *dtd*(*etA*), причём

*ddt*

(*etA*) = *dt*

*d*(*E* + *tA* + *t*2!2*A*2 + *...* + *tk*!*kAk* + *...*)

=

= *A*(*E* = + *A tA* + + *tA...* 2 + + *...* (*k t*+ *k−*1

*−* (*k* 1)!*tk−*1

*− A*1)!*k−*1 *A*+ *k* + *......* )

= =

*AetA* = *etAA.*

Таким образом,

*ddt*

(*etA*) = *AetA, etA*∣∣∣*t*=0= *E.* (13)■ Это свойство экcпоненциала позволяет проверить справедливость формулы Коши при *n >* 1 (подобно тому, как это было сделано выше при *n* = 1). Действительно, для векторной функции *x*(*t*), определяе- мой формулой (4), выполняется начальное условие *x*(*t*0) = *x*0 и, кроме того,

̇*x*(*t*) = *Ae*(*t−t*0)*A*

⎛∫*t*⎞⎝*x*0 +

*e−*(*s−t*0)*Au*(*s*)*ds*⎠ +

*t*0

+ *e*(*t−t*0)*Ae−*(*t−t*0)*Au*(*t*) = *Ax*(*t*) + *u*(*t*)*,*

т.е. функция (4) является решением задачи Коши (3).

Итак, доказана

20

**Теорема 2.2.** Решение задачи Коши (3) существует и определяется формулой Коши (4) или (5). Кроме того, решение задачи Коши (3) единственно.

**Задача 2.2.** Доказать единственность решения задачи Коши (3). **Задача 2.3.** Проверить, что

(*etA*)*∗* = *et*(*A\**)*, esA · etA* = *e*(*t*+*s*)*A,*

где *t, s ∈ E*1, *∗* – знак транспонирования.

**Замечание 2.2.** Если непрерывная функция *u*(*t*) определена на интервале (*a, b*), содержащем точку *t*0, то решение задачи (3) опре- делено на всем интервале (*a, b*) и описывается на этом интервале формулой Коши (4). Таким образом, формула Коши (4) применима как при *t>t*0, так и при *t<t*0.

**Пример.** Найти решение задачи Коши

̇*x* = *x* + 1*, x*(0) = 1*.*

Здесь *n* = 1, *a* = 1, *t*0 = 0, *x*0 = 1, *u*(*·*) *≡* 1. Применение форму- лы (2) даёт:

*x*(*t*) = *et*

⎛∫*t*⎞⎝1 +

*e−s ·* 1 *ds*⎠ =

0

(= *et*

1 + *e−s −*1

∣∣∣∣*s*=*t s*=0)

= *et*(1 *− e−t* +1)=2*et −* 1*.*

Формулу Коши (4), (5) целесообразно запомнить, так как иссле- дование линейной задачи быстродействия основано в значительной степени на применении формулы Коши.

**1.2.3 Примеры вычисления экспоненциала для конкретных мат-**

**риц**

**Пример 2.1.** Найти экспоненциал *etA* матрицы *A* =

(0 0 1

0). Прямое вычисление даёт *A*2 = 0; следовательно, *Ak* = 0 при *k* ⩾ 2, и ряд (7) содержит лишь 2 члена:

*etA* = *E* + *tA* =

(1 0 0

1)

+ *t*(0 0 1

0)

=

(1 0 1*t*

)*.*

21

Итак,

*etA* =

(1 0 1*t*

)*, e−tA* =

(1 0 *−t*

1)*, e−tA\** =

( 1 *−t* 0

1)*.*

**Пример 2.2.** Найти экспоненциал *etA* матрицы *A* =

( 0 *−*1 1

0). Находим: *A*2 = *−E, A*6 = *−E, A*3 = *−A, A*7 = *−A, A*4 = *E, A*8 = *E, A*5 = *A, A*9 = *A,* ......... .........

Применение формулы (7) даёт:

*etA* = *E* + *tA* + *t*2!2(*−E*) + *t*3!3(*−A*) + *t*4!4*E* + *t*5!5*A* + *t*6!6(*−E*) + *...* =

=

(1 *− t*2! 2+ *t*4! 4*− ...*)*E* +

(*t − t*3! 3+ *t*5! 5)*− ...A* =

= cos(*t*)*E* + sin(*t*)*A.* (14)

Таким образом,

*etA* = cos*t*(1 0 0

1)

+ sin*t*( 0 *−*1 1

0)

=

( cos*t −*sin*t* cos*t*sin*t*

)*,*

*etA\** =

( cos *t* sin*t −*sin*t* cos*t*

)*, e−tA\** = *etA.*

В примерах 2.1, 2.2 экспоненциал *etA* получен вычислением ря- да (7). Рассмотрим теперь другой приём нахождения экспоненциала на основе его свойства (13).

**Пример 2.3.** Найти экспоненциал *etA* матрицы *A* =

(0 0 *−*11

).

1) Покажем, что

*etA* =

(1 1 *− e−t*

0 *e−t*)*.* (15)

Для доказательства формулы (15) достаточно проверить, что матри- ца, стоящая в правой части (15), удовлетворяет условиям (13). Эта

22

матрица при *t* = 0 превращается в единичную матрицу, далее

*ddt*

(1 1 *− e−t*

0 *e−t*)

=

(0 *e−t*

0 *−e−t*)*,* (0 1

)(1 1 *− e−t* 0 *−*10 *e−t*)

=

(0 *e−t*

0 *−e−t*)*,*

и формула (15) доказана. Недостатком этого способа является то, что не указан способ получения самой формулы (15).

2) Рассмотрим метод получения (15) на основе свойства (13). За- пишем экспоненциал в форме

*etA* =

(*y*1(*t*) *y*2(*t*) *zz*1(*t*)

2(*t*))

=

(*y*(*t*)∣∣∣*z*(*t*))*.*

Его первый столбец *y*(*t*) =

(*yy*1(*t*)

2(*t*))

находим, решая задачу Коши

̇*y* = *Ay, y*(0) =

(10)*,*

причём вектором начальных условий служит первый столбец единич- ной матрицы. Последняя система в координатной форме имеет вид:

{  ̇*y*1 = *y*2*, y*1(0) = 1*,*  ̇*y*2 = *−y*2*, y*2(0) = 0*.*

Решая её, получаем:

*y*1(*t*) *≡* 1*, y*2(*t*) *≡* 0*, y*(*t*) *≡*

(10)*.*

Для нахождения второго столбца *z*(*t*) экспоненциала решаем задачу Коши

̇*z* = *Az, z*(0) =

(01)*.*

Получаем:

*z*1(*t*)=1 *− e−t, z*2(*t*) = *e−t, z*(*t*) =

(1 *− e−t*

*e−t*

)*.*

Таким образом, мы пришли к формуле (15).

23

Обратим внимание на то, что экспоненциал (15) может быть запи- сан в форме

*etA* = *p*0(*t*)*E* + *p*1(*t*)*A,* (16) где *p*0(*t*)=1, *p*1(*t*)=1 *− e−t*. Аналогичное представление было полу- чено для экcпоненциала из примера 2.2, см. (14), где *p*0(*t*) = cos(*t*), *p*1(*t*) = sin(*t*). Это наблюдение позволяет применить для нахождения экспоненциала следующий метод.

3) Ищем экспоненциал в форме (16), где функции *p*0(*t*), *p*1(*t*) под- лежат определению. Полагая в (16) *t* = 0, получаем

(1 0 0

1)

=

(*p*0(0) 0 *pp*1(0)

0(0) *− p*1(0))*,*

откуда следует, что функции *p*0(*t*)*, p*1(*t*) должны удовлетворять на- чальным условиям

*p*0(0) = 1*, p*1(0) = 0*.* (17) Дифференцируя (16) по *t*, получаем

*AetA* = ̇*p*0(*t*)*E* + ̇*p*1(*t*)*A*; (18)

подстановка (16) в (18) даёт

*p*0(*t*)*A* + *p*1(*t*)*A*2 = ̇*p*0(*t*) *E* + ̇*p*1(*t*)*A,*

откуда, принимая во внимание равенство *A*2 = *−A*, находим

̇*p*0(*t*)*E* + (  ̇*p*1(*t*) + *p*1(*t*) *− p*0(*t*))*A* = 0*,*

т.е. (  ̇*p*0(*t*) ̇*p*1(*t*) + *p*1(*t*) *− p*0(*t*)

0 *−*  ̇*p*1(*t*) *− p*1(*t*) + *p*0(*t*)+ ̇*p*0(*t*))

=

(0 0 0

0)*,* или

̇*p*0(*t*)=0*,*  ̇*p*1(*t*)+*p*1(*t*)*−p*0(*t*)=0*, −*  ̇*p*1(*t*)*−p*1(*t*)+*p*0(*t*)+ ̇*p*0(*t*)=0*.*

Из условий ̇*p*0(*t*)=0, *p*0(0) = 1 следует: *p*0(*t*) *≡* 1. Далее из условий  ̇*p*1(*t*)+*p*1(*t*)*−p*0(*t*)=0, *p*1(0) = 1, *p*0(*t*)=1 следует, что *p*1(*t*)=1*−e−t*. Таким образом, в примере 2.3

*etA* = *p*0(*t*)*E* + *p*1(*t*)*A* =

=

(1 0 0

1)

+ (1 *− e−t*)(0 0 *−*11

)

=

(1 1 *− e−t*

0 *e−t*)*.*

24

Выбор представления экспоненциала (16), на котором основан по- следний метод, объясняет приведённая в разделе 1.2.4 теорема 2.3.

**Пример 2.4.** Найти экспоненциал *etA* для матрицы *A* =

(0 1 1

0). Решение:

*etA* = ch*t · E* + sh*t · A* =

(ch*t* sh*t* ch*t*sh*t*

)*.*

**Пример 2.5.** Найти *etA*, где матрица

*A* =

⎛⎝0 0 1 0 0 1

⎞⎠*.* 0 0 0Решение: *Ak* = 0, *k* ⩾ 3,

*etA* = *E* + *tA* + *t*2!2*A*2 =

=

⎛1 0 0 ⎞⎝0 1 0

⎠ + *t*0 0 1⎛0 ⎝0 0 1 0 0 0 1 0⎞⎠ + *t*2

2⎛0 0 1

⎞⎝0 0 0

⎠ = 0 0 0⎛⎝1 0 *t* 1 *t*22 *t* 0 0 1

⎞⎠*.*

**Пример 2.6.** Найти *etA* для матрицы

*A* =

⎛⎝0 0 0 1 1 0

⎞⎠*.* 1 0 0Решение:

*A*2 = *A*4 = *...* = *A*2*k* = *E A*3 = *A*5 = *...* = *A*2*k*+1 = *A*}

*k* = 1*,*2*,...,*

и по формуле (7) получаем

*etA* = ch*t · E* + sh*t · A* = = ch*t*⎛1 0 0

⎞⎝0 1 0

⎠ + sh*t*0 0 1⎛0 0 1

⎞⎝0 1 0

⎠ = 1 0 0⎛ch*t* 0 sh*t*

⎞⎝0 *et* 0

⎠*.* sh*t* 0 ch*t*25

**Пример 2.7.** Найти *etA*, где (*n × n*)-матрица

*A* =

⎛⎜⎜⎜⎜⎝

⎞⎟⎟⎟⎟⎠*.*

Решение. Так как *An* = 0, то по формуле (7) получаем:

*etA* =

0 1 0 *···* 0 0 0 1 *···* 0

*··· ··· ··· ··· ···* 0 0 0 *···* 1 0 0 0 *···* 0

⎛⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎝1 0 0 0 *t* 1 0 0 *t*22 *t* 1 *··· ··· tn−*1 (*n −* 1)!

*··· ··· tn−*2 (*n −* ...

2)!

... *t* 0 0 0 *···* 1

⎞⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎠*.*

**Пример 2.8.** Найти экспоненциал *etA*, где (*n × n*)-матрица

*A* =

⎛⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎝

*λ* 1 0 *···* 0 ⎞0 0 *··· λ* 0 *···* 1 *λ ··· ··· ···* ... 0

...

1 ⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎠ 0 0 0 *··· λ*(жорданова клетка)*.*

**Пример 2.9.** Пусть

*J* = diag(*J*1*,J*2*,...,Js*)

– матрица клеточно-диагональной структуры c блоками

*Jm* =

⎛⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎝*λ···* 0 0 *m* 1 *λm* 0 *···* 0 *···* 1 *··· λm ··· ···* ... 0 0 ...

1 0 0 0 *··· λm*⎞⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎠

*, m* = 1*,...,s,*

26

размерности (*km×km*) (жорданова клетка); *k*1+*...*+*ks* = *n*. Показать, что (*n × n*)-матрица *J* имеет экcпоненциал клеточно-диагональной структуры

*etJ* =

⎛⎜⎜⎜⎜⎜⎝

*etJ*1 ⎞*etJ*2 0

0

⎟⎟⎟⎟⎟⎠

*.*

**Пример 2.10.** Найти *etA*, если *A* = *T −*1*J T*, где *T* – невырожден- ная (*n × n*)-матрица, *J* – матрица из примера 2.9. Показать, что

*etA* = *T −*1*etJT.*

Предлагается решить примеры 2.8-2.10 самостоятельно.

**1.2.4 Теорема о представлении экспоненциала в виде конечной**

**суммы**

**Теорема 2.3.** Пусть *A* – квадратная матрица *n*-ого порядка, *t* – скалярная переменная. Тогда

*etA* =

...

*etJs*

*n−*1∑*j*=0

*pj*(*t*)*Aj,* (19)

где *pj*(*t*) – скалярные непрерывные (и даже аналитические) функции аргумента *t*.

*2 Доказательство* теоремы 2.3 основано на представлении экспо- ненциала *etA* в форме ряда (7) и теореме Гамильтона-Кэли, состоящей в том, что матрица аннулирует свой характеристический многочлен.

Запишем формулу (7) в виде

*etA* = *E* + *tA* + *t*2!2*A*2 + *...*+

+ (*n tn−*1

*−* 1)!*An−*1 + *tn*!*nAn* + (*n tn*+1

+ 1)!*An*+1 + *...* (20)

27

Пусть

*HA*(*λ*) *≡* det(*A − λE*) = det⎛⎜⎜⎝*a*11 *− λ a*12 *··· a*1*n a*21 *a*22 *− λ ··· a*2*n*

*··· ··· ··· ···*

⎞⎟⎟⎠ = *an*1 *an*2 *··· ann − λ*= (*−*1)*n*(*λn − hn−*1*λn−*1 *− ... − h*1*λ − h*0) (21)

– характеристический многочлен матрицы A. Утверждение теоремы Гамильтона-Кэли можно записать в форме

*HA*(*λ*)∣∣∣*λ*=*A*= *O,* (22)

где *O* =

⎛0 *···* 0 ⎝ *··· ··· ···*

0 *···* 0

⎞⎠ – нулевая матрица размерности (*n × n*).

Из (21), (22) следует, что

*An* = *q*0 (*n*)

*E* + *q*1 (*n*)

*A* + *...* + *qn−*1 (*n*)

*An−*1*,* (23)

где многочлена *qj* (*n*)

= *hj*, (21). *j* = Формула 0*,*1*,...,n−*1, (23) – коэффициенты характеристического показывает, что *n*-ая степень *An* мат- рицы *A* линейно выражается через меньшие степени *A*0 = *E*, *A*1, *A*2, ..., матрицей *An−*1 *A*.

матрицы *A*, причём коэффициенты *qj* (*n*)

в (23) определяются

Покажем, что любая степень *Ak*, *k > n*, матрицы *A* также ли- нейно выражается через *A*0*,A*1*,A*2*,...,An−*1 с некоторыми коэффи- циентами, зависящими от номера *k* (и от матрицы *A*). Действительно, умножив равенство (23) на матрицу *A*, получаем:

*An*+1 = +*qn−*1 (*n*)

[ *q*0 (*n*) *q*0 (*n*)

*A E* + + *qq*1 (*n*) 1 (*n*)

*AA* 2 + + *... ···* + + *qqn−*1(*n*) *n−*2(*n*)

*AAn−*1*n−*1]

+

=

= *q*0 (*n*+1)

*E* + *q*1 (*n*+1)

*A* + *...* + *qn−*1 (*n*+1)

*An−*1 *,* (24)

28

где

*q*0 (*n*+1)

= *qn−*1 (*n*)

*q*0 (*n*)

*,*

*q*1 (*n*+1)

= *q*0 (*n*)

+ *qn−*1 (*n*)

*q*1 (*n*)

*,*

*q*2 (*n*+1)

= *q*1 (*n*)

+ *qn−*1 (*n*)

*q*2 (*n*)

*,* .........................

*qn−*1 (*n*+1)

= *qn−*2 (*n*)

+ *qn−*1(*n*)

*qn−*1 (*n*)

*.* Аналогично получаем:

*An*+2 = *q*0 (*n*+2)

*E* + *q*1 (*n*+2)

*A* + *...* + *qn−*1 (*n*+2)

*An−*1*,* (25) *An*+*s* = *q*0 (*n*+*s*)

*E* + *q*1 (*n*+*s*)

*A* + *...* + *qn−*1 (*n*+*s*)

*An−*1*,* (26)

и так далее. Подстановка соотношений (24) – (26) в ряд (20) приводит (после перегруппировки членов) к представлению (19) экспоненциа- ла *etA*. ■

**Упражнение 2.1.** Выписать ряды для коэффициентов

*p*0(*t*)*, p*1(*t*)*, ..., pn−*1(*t*) в формуле (19) и доказать сходимость этих рядов при любом *t*.

**Замечание 2.3.** В формуле (19) фактически могут отсутствовать несколько старших степеней матрицы *A*. Например, для матрицы

*A* =

⎛⎝0 0 0 1 1 0

⎞⎠ 1 0 0из примера 2.6, где *n* = 3, мы получили *etA* = ch(*t*) *· E* + sh(*t*) *·A,* т.е. здесь в представлении экспоненциала

*etA* = *p*0(*t*)*E* + *p*1(*t*)*A* + *p*2(*t*)*A*2 имеем

*n −* 1=2*, p*0(*t*) = ch(*t*)*, p*1(*t*) = sh(*t*)*, p*2(*t*)=0*,* член с *A*2 фактически отсутствует. В случае *A* = *E* имеем:

*etA* = *et · E,*

т.е. здесь

*p*0(*t*) = *et, p*1(*t*) = *...* = *pn−*1(*t*)=0*.* Теорема 2.3 будет использоваться в разделе 3.15 при доказатель- стве леммы о внутренней точке интеграла.

29

**1.2.5 Пример применения формулы Коши для нахождения ре-**

**шения линейных систем**

Задача Коши

̈*y* = *u*2(*t*)*, y*(0) = *a*1*,*  ̇*y*(0) = *a*2*,* (27)

где *u*2(*t*) – заданная функция, *a*1, *a*2 – заданные числа, может быть решена двумя последовательными интегрированиями:

̇*y*(*t*)= ̇*y*(0) +

∫*t*0

∫*t* ̈*y*(*s*) *ds* = *a*2 +

*u*2(*s*) *ds,*

0

*y*(*t*) = *y*(0) +

⎛⎝*a*2 +

*u*2(*s*) *ds*⎞⎠ *dτ* =

= *a*1 + *a*2*t* +

∫*t*0

∫*t*0 ∫*τ* ̇*y*(*τ*) *dτ* = *a*1 +

∫*t*⎛⎞0

⎝

*u*2(*s*) *ds*⎠ *dτ* = *a*1 + *a*2*t* +

0

∫*τ*0

∫*t*0

(*t − s*)*u*2(*s*) *ds.*

Полагая *x*1 = *y, x*2 = ̇*y,* { запишем ̇*x*1 = *x*2*,* задачу (27) в виде *x*1(0) = *a*1*,*

̇*x*2 = *u*2*, x*2(0) = *a*2*,* или

̇*x* = *Ax* + *u, x*(0) =

(*a*1*a*2)*,* (28) где

*x* =

(*x*1*x*2)*, A* =

(0 0 1

0)*, u*(*t*) =

( 0

*u*2(*t*))*.* Найдём решение задачи (28), применяя формулу Коши (5). Имеем:

*x*(*t*) =

(*xx*1(*t*)

2(*t*))

=

=

(1 *t*

)(*a*10 1*a*2)

+

(1 *t − s* 0 1

)( 0

*u*2(*s*))

*ds* =

=

∫*t*0 (*a*1 + *a*2*t*

*a*2

)

+

∫*t*((*t − s*)*u*2(*s*)

) *u*2(*s*)*ds* = 0

30

⎛⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎝*a*1 + *a*2*t* +

⎞⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎠*,*

т.е.

*x*1(*t*) = *a*1 + *a*2*t* +

∫*t*0

(*t − s*)*u*2(*s*) *ds*

=

*a*2 +

∫*t*0

*u*2(*s*) *ds*

∫*t*0

(*t − s*)*u*2(*s*) *ds* = *y*(*t*)*,*

*x*2(*t*) = *a*2 +

∫*t*0

*u*2(*s*) *ds* = ̇*y*(*t*)*.*

**Упражнение 2.2.** Найти решение задачи Коши

1) 2) ...*y*  ̈*y* + = *y* = *u*2(*t*)*, y*(0) = *a*1*,*  ̇*y*(0) = *a*2;

*u*3(*t*)*, y*(0) = *a*1*,*  ̇*y*(0) = *a*2*,*  ̈*y*(0) = *a*3*.*

**1.2.6 Явная формула для решения задачи Коши в случае од- номерного линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами**

Рассмотрим следующую задачу Коши

̇*x* = *a*(*t*)*x* + *b*(*t*)*, x*(*t*0) = *x*0*,* (29)

где *a*(*t*), *b*(*t*) – известные непрерывные функции. Решение *x*(*t*) задачи Коши (29) определяется формулой

*x*(*t*) = *eA*(*t*)

⎛∫*t*⎞⎝*x*0 +

*e−A*(*s*)*b*(*s*)*ds*⎠*,* (30)

*t*0

где функция *A*(*t*) имеет вид *A*(*t*) = *e*

∫*tt*0

*a*(*s*) *ds.* **Упражнение 2.3.** Проверить формулу (30).

31

**1.3 Множество достижимости, множество управляе- мости. Их представление на основе формулы Ко- ши. Предварительные соображения о решении линейной задачи быстродействия**

Рассмотрим линейную задачу быстродействия

̇*x* = *Ax* + *u*; *x*(*t*0) *∈ M*0*, x*(*t*1) *∈ M*1; *t*1 *− t*0 *→* min

с классом допустимых управлений У = У*U.* При изучении этой задачи важную роль играют два множества – множество достижимости и множество управляемости.

**1.3.1 Множество достижимости** *X*(*t*) = *X*(*t*0*, t, M*0)

Введём множество *X*(*t*0*,τ,M*0), определяемое множеством *M*0, на- чальным моментом времени *t*0, числом *τ>t*0 (это множество зависит также от матрицы *A* и от класса допустимых управлений У = У*U*). Рассмотрим задачу Коши

̇*x* = *Ax* + *u*(*t*)*, t*0 ⩽ *t* ⩽ *τ*; *x*(*t*0) = *x*0 *∈ M*0 (1)

и выпишем её решение по формуле Коши

*x*(*t*) = *e*(*t−t*0)*Ax*0 +

∫*tt*0

*e*(*t−s*)*Au*(*s*) *ds.* (2)

*e*(*t−s*)*Au*(*s*) *ds.* (2)

Поставим вопрос: куда можно перейти к моменту времени *τ* по тра- екториям дифференциального уравнения (1), исходящим в начальный момент времени *t*0 из различных точек *x*0 *∈ M*0, если разрешается использовать всевозможные допустимые управления *u*(*·*) *∈* У? Мно- жество концов *x*(*τ*) описанных выше траекторий образует некоторое множество в *En*, которое называется *множеством достижимости* и обозначается *X*(*t*0*,τ,M*0) (см. рисунок 3.1).

Таким образом,

*X*(*t*0*,τ,M*0) =

{∣*x ∈ En* ∣∣∣∣

*x* = *x*(*τ*)*,* формула (2) *x*(*t*0) *∈ M*0*, u*(*·*) *∈* У

*x* = *x*(*τ*)*,* формула (2) *x*(*t*0) *∈ M*0*, u*(*·*) *∈* У

при *t* = *τ*;

при *t* = *τ*;

при *t* = *τ*;

}*,* (3)

}*,* (3)

}*,* (3)

}*,* (3)

32

Множество *X*(*t*) с ростом *t* изменяется. При достаточно малых зна- чениях *t − t*0 *>* 0 множество*X*(*t*) ⋂ *M*1 = 0*,* (см. рисунок 3.2).

Если *t*1 *− t*0 – оптимальное время перехода из *M*0 в *M*1, то

*X*(*t*) ⋂ *M*1 = 0 при *t*0 ⩽ *t<t*1*, X*(*t*1) ⋂ *M*1 = 0*.* Подчеркнём, что априори ниоткуда не следует, что множество дости- жимости *X*(*t*), в процессе изменения с течением времени, войдёт в контакт с множеством *M*1.

33

*t*1∫*t*

*e*(*t−s*)*A*[*−u*(*s*)]*ds.* (7)

= *e*(*t−t*1)*Ax*1 +

= *e*(*t−t*1)*Ax*1 +

Множество *Z*(*τ,t*таких точек *z ∈ E*1*,Mn*, находясь 1) (*множество* в которых *управляемости*) в момент времени состоит *τ*, объект из всех в момент времени *t*1 попадает на множество *M*1 при помощи некоторого допустимого управления:

*Z*(*τ,t*1*,M*1) =

{∣*z ∈ En* ∣∣∣∣

*z* = *x*(*τ*)*,* формула (7) при *x*(*t*1) *∈ M*1*, u*(*·*) *∈* У

*z* = *x*(*τ*)*,* формула (7) при *x*(*t*1) *∈ M*1*, u*(*·*) *∈* У

*t* = *τ*;

*t* = *τ*;

*t* = *τ*;

}

}

}

*,* (8)

*,* (8)

*,* (8)

*,* (8)

34

или, в более подробной записи,

*Z*(*τ,t*1*,M*1) =

⎧⎨⎫⎬⎩*z ∈ En*

⎭*,*(9) или*Z*(*τ,t*1*,M*1) = ⋃

*xu*(*v*)*e*У 1*eM*1 ∣∣∣∣∣∣

*z* = *e*(*τ−t*1)*Ax*1+

1∫*te*(*τ−s*)*A*[*−u*(*s*)]*ds*; *x*1 *∈ M*1*, u*(*·*) *∈ τ* У

⎧⎨1∫*t*⎫⎬⎩*e*(*τ−t*1)*Ax*1 +

*e*(*τ−s*)*A*[*−u*(*s*)] *ds*⎭*.* (10) *τ* Естественно ляемости удобно считать, использовать что *Z*(*t, t*1*,M*краткое 1)∣∣∣*t*=*t*обозначение:

1= *M*1. Для множества управ-

*Z*(*t*) *≡ Z*(*t, t*1*,M*1)*.*

Свойства множеств *X*(*t*), *Z*(*t*) рассмотрены в разделе 3.8. В случае *t*1 *− t*0 = min между множествами *X*(*t*) и *Z*(*t*) имеется тесная связь, описанная в разделе 3.11.

**1.3.3 Представление множеств достижимости и управляемости**

**на основе формулы Коши**

Имеют место следующие представления:

∫*tX*(*t*0*, t, M*0) = *e*(*t−t*0)*AM*0 +

*t*0

*e*(*t−s*)*A*У *ds,* (11)

*Z*(*t, t*1*,M*1) = *e*(*t−t*1)*AM*1 +

1∫*tt*

*e*(*t−s*)*A*[*−*У] *ds.* (12)

Обсудим структуру правых частей формул (11), (12). Первые сла- гаемые имеют вид произведения матрицы (экспоненциала) на множе- ство, а вторые слагаемые имеют вид интеграла от класса допустимых управлений У. Для обоснования формул (11), (12) ниже вводятся ли- нейные операции над множеством в пространстве *En*, операция инте- грирования класса допустимых управлений У.

35

**1.3.4 Операции над множествами в пространстве** *En*

**Определение 3.1.** *Алгебраической F*2 *⊂ En* называется множество

*суммой двух множеств F*1,

*F*1 + *F*2 = *{x ∈ En*: *x* = *f*1 + *f*2*, f*1 *∈ F*1*, f*2 *∈ F*2*},*

т.е.

*F*1 + *F*2 = ⋃

*ff*12*eFeF*1 2*{f*1 + *f*2*}.* **Пример 3.1.** Пусть

*F*1 = *{x ∈ E*2: *|x*1*|* ⩽ 1*,x*2 = 0*}, F*2 = *{x ∈ E*2: *x*1 = 0*, |x*2*|* ⩽ 1*}*

– отрезки. Множество

*F* = *F*1 + *F*2 есть квадрат *{x ∈ E*2: *|x*1*|* ⩽ 1*, |x*2*|* ⩽ 1*}*

(см. рисунок 3.3).

*F*2

1

*x*2

*F*1 1 *x*2 *F −*1

0 1

*x*1 *−*1

0 1

*x*1

*−*1

*−*1

Рисунок 3.3

**Пример 3.2.** Пусть *F*1 = *{a}* – множество, состоящее из одной точки *a ∈ E*2, *F*2 = *Sr*(0) – круг. Тогда

*F*1 + *F*2 = *{a}* + *Sr*(0) = *Sr*(*a*)

есть круг радиуса *r* с центром в точке *a* (см. рисунок 3.4).

36

**Пример 3.3.** Пусть

*D* =

⎛⎜⎜⎝

*− √*12

*√*12 *√*12

*√*12⎞⎟⎟⎠ *, F* = {*x ∈ E*2: *|x*1*|* ⩽ 1*, x*2 = 0}*.*

Тогда

*DF* =

{*x ∈ E*2: *x*2 = *−x*1*, |x*1*|* ⩽ *√*12} – отрезок (см. рисунок 3.5).

**Определение 3.3** *(интеграл от класса допустимых управле- ний)***.** Пусть У – класс допустимых управлений, *D*(*s*) – (*n × n*)- матрица, непрерывно зависящая от скалярного аргумента *s ∈* [*t*0*,t*];

37

{*x ∈ En*: *x* =

∫*tt*0 }*D*(*s*)*u*(*s*) *ds, u*(*·*) *∈* У*,*

∫*tt*0

∫*t*0

*D*(*s*)У *ds* =

{*x ∈ En*: *x* = ∫*tt*0 }*D*(*s*)[*−*У] *ds* =

*D*(*s*)[*−u*(*s*)] *ds, u*(*·*) *∈* У*.*

Из формул (5), (10) и определений 3.1, 3.2, 3.3 следуют представ- ления (11), (12).

38

**2 Элементы выпуклого анализа в простран-**

**стве** *En***. Три теоремы об интегралах**

**2.4 Основные обозначения и определения. Наимень- шая выпуклая оболочка множества и её постро- ение. Лемма об отделимости**

**2.4.1 Основные обозначения и определения**

*En* – *n*-мерное евклидово пространство,

*x* =

⎛⎜⎝*x*...1*xn*⎞⎟⎠*, y* =

⎛⎜⎝*y*...1*yn*⎞⎟⎠, ... – элементы пространства *En*, (*x, y*) = *x*1*y*1 + *...* + *xnyn* – скалярное произведение элементов *x* и *y*,

*x* = (*x, x*)1*/*2 – норма элемента *x*,

*x − y* =

( ∑*ni*=1(*xi − yi*)2)1*/*2

– расстояние между элементами *x* и *y*,

*F Sr*(*a*) – множество, = {*x ∈* лежащее *En*: *x − a* в ⩽ пространстве *r*} – *En*,

шар радиуса *r* с центром в точке *a* (*r S* ⩾ = 0, {*x a ∈ ∈ En*),

*En*: *x* = 1} – единичная сфера с центром в точке 0 (0 *∈ En*), *2* – начало доказательства,

■ – конец доказательства.

**Определение 4.1.** Множество *F* называется *открытым*, если для любой (*∀x ∈ F* точки *∃ε > x* 0: *∈ F Sε*(*x*) существует *⊂ F*) (см. рисунок число *ε >* 0 такое, что *Sε*(*x*) *⊂ F* 4.1).

Множества*F*1 = *{x* = (*x*1*,x*2) *∈ E*2: *|x*1*| <* 1*, |x*2*| <* 1*},*

*F*2 = *{x* = (*x*1*,x*2) *∈ E*2: *x*21 + *x*22 *<* 1*}* являются открытыми в *E*2; множества *Sr*(*a*), *S* не являются открыты- ми.**Определение 4.2.** Точка *a ∈ En* называется *множества F*, если *∀ε >* 0 выполняется условие *предельной Sε*(*a*) ⋂ *F* = *точкой*

0.

39

Так, для множества *F* = *{x ∈ En*: *x <* 1*}* все его предельные точки образуют множество *S*1(0)*.*

**Определение 4.3.** Множество *F* называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Множества *Sr*(0), *S* замкнуты. **Определение 4.4.** Множество *F* называется *ограниченным*, если существует такое число *R >* 0, что имеет место включение *F ⊂ SR*(0), см. рисунок 4.2.

*F*

*x*2

Рисунок 4.1 Рисунок 4.2

**Определение 4.5.** *Модулем множества F* называется число

*|F|* = sup

*f∈F f* = *r*李0inf {*r*: *F ⊂ Sr*(0)}*.*

Для любого Модуль множества ограниченного *F* = {*x ∈ E*2множества *F* : *|x*1*|* ⩽ 1*, |x*2*|* его ⩽ 1} модуль равен *√|F|* 2.

*< ∞*.

**Определение 4.6.** Множество *F* называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Примерами компактов являются множества

*Sr*(0)*, S, F* = {*x ∈ E*2: *|x*1*|* ⩽ 1*, |x*2*|* ⩽ 1} ;

множества

*F*1 = *S*1(0) *\ {*0*}, F*2 = *S*1(0) *\ S* не являются компактами (нет замкнутости); множество *F*3 = {*x ∈ E*2: *x*2 ⩾ 0} (полуплоскость)

40

*SR*(0) *Sε*(*x*)

*x F*

0 *R*

*x*1

не является компактом (нет ограниченности).

**Определение 4.7.** Ω(*En*) – множество, элементами которого яв- ляются всевозможные непустые компакты пространства *En*.

**Определение 4.8.** Пусть *x, y* – точки пространства *En*. *Отрезком* [*x, y*] с концами *x*, *y* называется множество

[*x, y*] = {*z ∈ En*: *z* = *λx* + (1 *− λ*)*y, λ ∈* [0*,*1]}*,*

или

[*x, y*] = ⋃

{*λx* + (1 *− λ*)*y*}*. λ∈*[0*,*1]**Определение 4.9.** Множество *F* называется *выпуклым*, если

*x, y ∈ F ⇒* [*x, y*] *⊂ F.*

Так, множество *Sr*(*a*) выпукло, а множество *S* невыпукло. На ри- сунке 4.3 изображено невыпуклое множество.

*x F*

*z z /∈ F y* Рисунок 4.3

**Определение 4.10.** conv Ω(*En*) – множество, состоящее из непу- стых выпуклых компактов пространства *En*.

Ясно, что conv Ω(*En*) *⊂* Ω(*En*)*.*

**2.4.2 Наименьшая выпуклая оболочка множества и её постро-**

**ение**

**Определение 4.11.** Множество *G ⊂ En* называется *выпуклой оболочкой множества F*, если *G* выпукло и *G ⊃ F*.

Выпуклая оболочка множества определяется неединственным об- разом, см. рисунок 4.4.

**Определение 4.12.** Множество *H* называется *наименьшей выпук- лой оболочкой множества F*, если41

1) *H*– выпуклая оболочка, 2) для любой выпуклой оболочки *G* множества *F* выполняется включение *G ⊃ H*.

Обозначение наименьшей выпуклой оболочки множества:

*H* = conv *F.*

Для невыпуклого множества *F*, изображенного на рисунке 4.5 а), наименьшая выпуклая оболочка conv *F* изображена на рисунке 4.5 б).

*F* conv*F*

а) б)

Рисунок 4.5

Если множество *F* выпукло, то conv *F* = *F*. Для множества *F*, состоящего из трёх точек (рисунок 4.6), conv *F* есть треугольник.

**Теорема 4.1** (*о построении наименьшей выпуклой оболочки*)**.** Для любого множества *F ⊂ En* существует наименьшая выпуклая оболочка conv *F*, которую можно построить следующим образом. Рас-

42

2) множество *H* выпукло,

3) любая выпуклая оболочка *G* множества *F* содержит множе-

ство *H*: *G ⊃ H*

(см. определения 4.11, 4.12).

Из построения множеств *Fm*, *H* следует свойство монотонности:

*F* = *F*0 *⊂ F*1 *⊂ F*2 *⊂ ... ⊂ Fm ⊂ ... ⊂ H.*

Проверим выпуклость множества *H*: *x*, *y ∈ H ⇒* [*x, y*] *⊂ H*. Возь- мём две точки *x*, *y ∈ H*. Существует такой номер *m*1, что *x ∈ Fm*1; су- ществует такой номер *m*2, что *y ∈ Fm*2. Тогда из свойства монотонно- сти следует, что *x, y ∈ Fm*, где *m* = max*{m*1*,m*2*}*, и, привлекая опре- деление множества *Fm*+1, получаем, что отрезок [*x, y*] *⊂ Fm*+1 *⊂ H*. Доказана выпуклость множества *H*. Итак, *H* – выпуклая оболочка множества *F*.

43

Пусть теперь *G* – любая выпуклая оболочка множества *F*. Тогда

*F* = *F*0 *⊂ G,* ........... *F*1 *⊂ G, Fm*+1 *⊂ G, F*2 *⊂ G,* ...........

*H* =

⋃*∞m*=0*Fm ⊂ G,*

т.е. доказано, что *H* = conv*F*. ■ *нечномерном* **Замечание** *пространстве* **4.1** (*о стабилизации En*)**.** Существует *цепочки множеств* такой наименьший *{Fm} в ко-* но- мер *s* = *s*(*n, F*), что *Fs* = *Fs*+1 = *...* = *H*, причём 0 ⩽ *s* ⩽ *n*. Так, например, для выпуклого множества *F* имеем *F*0 = *F*1 = *...* = *H*, т.е. *s* = 0. Для множества *F*, состоящего из отрезка и точки, не лежащей на этом отрезке (рисунок 4.7),

*F* conv*F* **\* \***

Рисунок 4.7

имеем:

*n* = 2*, s* = 1*, F*0 = *F*1 = *F*2 = *...* = *H.* Для множества *F*, рассмотренного выше (рисунок 4.6), *n* = 2, *s* = 2,

*F*0 *⊂ F*1 *⊂ F*2 = *F*3 = *...* = *H, F*0 = *F*1*, F*1 = *F*2*.*

**Замечание 4.2** (*об эквивалентной формулировке процесса по- строения наименьшей выпуклой оболочки множества*)**.** Последо- вательность множеств *{Fm}*, введённая в теореме 4.1, может быть определена соотношениями

*F*0 = *F, Fm*+1 = ⋃

*λ∈*[0*,*1]*{λFm* + (1 *− λ*)*Fm}, m* = 0*,*1*,...*

44

Действительно,

*Fm*+1 = ⋃

*x,y∈Fm*[*x, y*] = ⋃

*x,y∈Fm*

⋃ *λ∈*[0*,*1]*{λx* + (1 *− λ*)*y}* = = ⋃

*λ∈*[0*,*1]

⋃ *x,y∈Fm{λx* + (1 *− λ*)*y}* = ⋃

*{λFm* + (1 *− λ*)*Fm}. λ∈*[0*,*1]**Задача 4.1.** Установить включение *F ⊂ λF* + (1*−λ*)*F ∀λ ∈* [0*,*1]. Включение *F ⊃ λF* + (1*− λ*)*F, λ ∈* (0*,*1), может не выполняться. Так при *n* = 1, *F* = *{−*1*,*+1*}*, *λ* = множество *F* не содержит множество 12 **Задача 4.2.** Показать, что для имеем выпуклого 12*F* 12+ *F* 12+ множества *F*.

12*F* = *{−*1*,*0*,*+1*}*, т.е.

*F* при любом *λ ∈* [0*,*1] выполняется равенство

*F* = *λF* + (1 *− λ*)*F .*

**Задача 4.3.** Алгебраическая сумма *F*1+*F*2 выпуклых множеств *F*1, *F*2 является выпуклым множеством.

**Задача 4.4.** Если *F* – выпуклое множество, *D* – (*n × n*)-матрица, то множество *DF* выпукло.

**Задача 4.5.** Доказать утверждение о стабилизации цепочки мно- жеств *{Fm}* в конечномерном **Задача 4.6.** Если *F* пространстве *En*, см. замечание *∈* Ω(*En*), то conv*F ∈* conv Ω(*En*).

4.1.

**2.4.3 Лемма об отделимости (строгая отделимость) и её геомет- рическая интерпретация. Опорная гиперплоскость**

**Лемма 4.1.** Пусть

1) *H ∈* conv Ω(*En*) (т.е. множество *H* – выпуклый компакт),

2) *x*0 */∈ H* (т.е. точка *x*0 не принадлежит компакту *H*),

тогда

*∃ψ ∈ En, ψ* = 0: (*h − x*0*,ψ*) *<* 0 *∀h ∈ H,* (1) *∃ψ*0 *∈ S*: (*h − x*0*,ψ*) *<* 0 *∀h ∈ H.* (2)

Утверждения (1) и (2) равносильны. Лемма об отделимости имеет простой геометрический смысл (рисунок 4.8):

45

min *h∈H h − x*0 = *h*0 *− x*0 *>* 0*.* (3)

Отметим, что точка *h*0 называется *проекцией точки x*0 *на ком- пакт H* (обозначение: *h*0 = *PrH* , *x*0) (см. рисунок 4.9). Минимум в (3) на основании теоремы Вейерштрасса достигается в некоторой точке *h*0 *∈ H,* причём строгое неравенство *h*0*−x*0 *>* 0 выполняется, так как *x*0 */∈ H* и *H* – компакт. Полагаем

*ψ* = *x*0 *− h*0 *.* (4)

2. Покажем теперь, что с определённым равенством (4) вектором *ψ* справедливо неравенство (1), т.е.

(*h − x*0*,x*0 *− h*0) *<* 0 *∀h ∈ H.*

Последнее неравенство равносильно следующему

(*h − x*0*,h*0 *− x*0) *>* 0 *∀h ∈ H.* (5)

46

*ψ H h*(*λ*)= *x*0 *− h*0

*h*0

*h*

Рисунок 4.10

В силу выпуклости множества *H* имеем: *h*(*λ*) *∈ H ∀λ ∈* [0*,*1]. Поэтому в силу (3)

*h*(*λ*) *− x*0 2 ⩾ *h*0 *− x*0 2 *∀λ ∈* [0*,*1]*.* (7)

47

*x*0Γ*ψ*

Неравенство (7) последовательно преобразуется следующим образом:

*λh* + (1 *− λ*)*h*0 *− x*0 2 ⩾ *h*0 *− x*0 2*, λ*(*h − h*0)+(*h*0 *− x*0) 2 ⩾ *h*0 *− x*0 2*, λ*2 *h − h*0 2 + 2*λ*(*h − h*0*,h*0 *− x*0) + *h*0 *− x*0 2 ⩾ *h*0 *− x*0 2*, λ h − h*0 2 +2(*h − h*0*,h*0 *− x*0) ⩾ 0*.*

Переход к пределу при *λ →* +0 в последнем неравенстве даёт

(*h − h*0*,h*0 *− x*0) ⩾ 0 *∀h ∈ H.* (8)

Докажем теперь неравенство (6), привлекая (8). Имеем

(*h − x*0*,h*0 *− x*0)=(*h − h*0 + *h*0 *− x*0*,h*0 *− x*0) = = (*h − h*0*,h*0 *− x*0) + *h*0 *− x*0 2 ⩾ *h*0 *− x*0 2 *∀h ∈ H.* ■

**Замечание 4.3.** Оба условия леммы об отделимости существен- ны: утверждение леммы не сохраняется при отсутствии выпуклости компакта *H*, при нарушении замкнутости или ограниченности множе- ства *H*, при *x*0 *∈ H*.

Π*ψ*

*h*0

*ψ*

*Hh*

Γ*ψ*

Рисунок 4.11

**Замечание 4.4.** Если *h*0 – граничная точка выпуклого компак- та *H*, то

*∃ψ ∈ En,ψ* =0: (*h − h*0*,ψ*) ⩽ 0 *∀h ∈ H.* (9)

48

С геометрической точки зрения это означает, что через точку *h*0 мож- но провести гиперплоскость

Γ*ψ* = {*x ∈ En*: (*x − h*0*,ψ*)=0}*,*

которая делит всё пространство *En* на два полупространства, одно из которых (полупространство Π*ψ* = *{x ∈ En*: (*x − h*0*,ψ*) ⩽ 0*}*) со- держит выпуклый компакт *H*: Π*ψ ⊃ H* (см. рисунок 4.11). Гиперплос- кость Γ*ψ* называется *опорной гиперплоскостью для компакта H*. Неравенство (9) запишем в форме

(*h, ψ*) ⩽ (*h*0*,ψ*) *∀h ∈ H.*

Из него следует, что*c*(*H, ψ*) *≡* max *h∈H*(*h, ψ*)=(*h*0*,ψ*)*.*

Функция *c*(*H, ψ*), определяемая компактом *H*, называется *опорной функцией этого компакта в направлении вектора ψ*. При помо- щи этой функции можно описать гиперплоскость Γ*ψ* и полупростран- ство Π*ψ*:

Γ*ψ* = *{x ∈ En*: (*x, ψ*) = *c*(*H, ψ*)*},* Π*ψ* = *{x ∈ En*: (*x, ψ*) ⩽ *c*(*H, ψ*)*}.*

Достаточно представительный набор опорных гиперплоскостей Γ*ψ*1, Γ*ψ*2, *...*, Γ*ψN* позволяет строить аппроксимации выпуклых компактов в форме пересечения полупространств Π*ψ*1, Π*ψ*2, *...*, Π*ψN*, каждое из которых, как мы видим, описывается опорной функцией *c*(*H, ψ*) компакта *H*.

В следующем разделе проводится подробное изучение опорных функций.

**2.5 Опорные функции ограниченных множеств**

Опорные функции представляют собой удобный аналитический ап- парат для описания выпуклых компактов. Этот аппарат в дальнейшем будет применяться при изучении линейной задачи быстродействия. Опорные функции удобно применять не только для изложения тео- рии, но и при построении численных методов решения задачи быст- родействия.

49

**2.5.1 Предварительные геометрические соображения**

Рассмотрим выпуклый компакт *F* на плоскости. Ясно, что компакт *F* можно приближённо представить при помощи описанных выпуклых многоугольников, (см. рисунок 5.1), причём при подходящем увели- чении числа сторон выпуклого многоугольника выпуклый компакт *F* может быть представлен весьма точно.

*F F*

*ψ*2

Рисунок 5.1 а)

Если выбрать достаточно представительный набор векторов *ψ*0, *ψ*1, ..., *ψN ∈ S*, то получим*F ⊂*

Γ*ψ*2

*ψ*1 *x*0Γ*ψ*1

⋂*Nk*=0Π*ψk ≡ MN,*

где пересечение конечного числа полупространств (полуплоскостей) – выпуклый многоугольник *MN* – даёт достаточно точное описание выпуклого компакта *F*. При этом аппроксимация множества много- угольником носит внешний характер: *MN ⊃ F*. Мы покажем далее2,

2Рисунок 5.1 а) носит схематичный характер: плоское выпуклое множество грубо приближается описанным выпуклым пятиугольником. На рисунке 5.1 б) показан ре- зультат аппроксимации плоского выпуклого компакта (лунки, см. пример 21.10)

*L* = *S√*2((10)) ⋂ *S√*2((*−*10

))*,*

которая является пересечением двух кругов радиуса *√*2 с центром в точках (1*,* 0)

50